3 WAVES

3.1 Introduction

Wave over deep water :

Une onde monochromatique peut être décrite par :

$$\eta = A\cos(kx - \omega t)$$

→ Elle se déplace à une vitesse $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$ avec $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

→ Si on a un paquet d'onde localisé, centré autour d'un nombre d'onde k, le paquet va se déplacer à la vitesse de groupe

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\sqrt{gk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{c}{2}$$

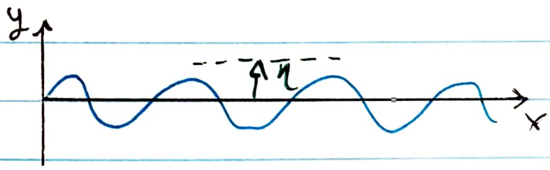
↳ En eau profonde, $c_g = \frac{c}{2}$ ⇒ l'onde est dispersive

Hypothèse :

→ On fera tjs l'hypothèse d'une onde infinitésimale

$$u \ll 1 \qquad \partial_x u \ll 1 \qquad \partial_x^2 u \ll 1$$

3.2 Vagues en eau profonde



→ On considère une onde à 2-D :

$$\bar{u} = \left[u(x,y,t), v(x,y,t), 0\right]$$

et on suppose l'écoulement irrotationnel : $\bar{\nabla} \times \bar{u} = \partial_y u - \partial_x v = 0$

et sans viscosité : $\nu = 0$

→ Puisque $\bar{\nabla} \times \bar{u} = 0$, on peut écrire $\bar{u} = \bar{\nabla}\varphi$:

On pose $\phi(x,y,t)$ tel que $u = \partial_x \varphi$ et $v = \partial_y \varphi$

Or, l'écoulement est incompressible :

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0 = \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi$$

DEF La hauteur de la vague à l'instant t est notée $y = \eta(x,t)$

⊙ Condition cinématique à la surface :

→ Hypothèse : chaque particule de fluide en surface y reste.
Alors pour une telle PDF, on a :

$$F(x,y,t) \equiv y - \eta(x,t) = 0$$

De plus, $\frac{DF}{Dt} = 0 \Rightarrow \partial_t F + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})F = 0$

$$\Leftrightarrow -\partial_t \eta - u\,\partial_x \eta + v = 0$$

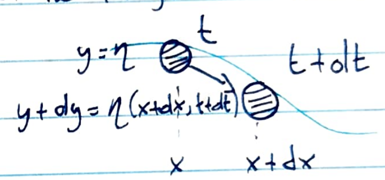
$$\Leftrightarrow \quad \partial_t \eta + u\,\partial_x \eta = v$$

→ Alternativement, considérons explicitement la trajectoire d'une PDF.

$\eta(x+dx, t+dt) = \eta(x,t) + v(x,t)\,dt$

$= \eta(x,t) + \partial_x \eta \cdot dx + \partial_t \eta \cdot dt$

$\Leftrightarrow \partial_t \eta + u\,\partial_x \eta = v$



→ Remarques :

Si $\partial_x \eta = 0 \Rightarrow v = \partial_t \eta$

Si $\partial_t \eta = 0 \Rightarrow v/u = \partial_x \eta$

→ Les PDF suivent la surface fixe.

⊙ Eq. de Bernoulli pour un écoulement irrot. non-stationnaire :

→ Puisque l'écoulement est irrotationnel : $\bar{u} = \bar{\nabla}\varphi$
L'équation d'Euler devient :

$$\partial_t \bar{u} + \bar{\omega}\times\bar{u} = -\nabla\left(P/\rho + \tfrac{1}{2}u^2 + \chi\right) \quad \text{avec } \chi = gy$$

$$\Leftrightarrow \bar{\nabla}\left(\partial_t \varphi + P/\rho + \tfrac{1}{2}u^2 + gy\right) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t \varphi + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gy \equiv G(t) \;, \quad G(t) \text{ une fct arbitraire}$$

⊙ Condition de pression à la surface :

→ Si on se place à la surface, $y = \eta(x,t)$. On pose $G(t) \equiv P_0/\rho$
Pour annuler le terme de pression. L'expression devient :

$$\partial_t \phi + \tfrac{1}{2}u^2 + g\eta = 0$$

On a fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de tension de surface.

17

Linéarisation des équations :

→ On suppose que $\bar{u} \sim \epsilon$ est petit, et on ne garde que les termes du même ordre : $\varphi \sim \eta \sim \epsilon$ et $u^2 \sim \epsilon^2$

↳ A l'ordre 1 : $\partial_t \varphi + \frac{1}{2}u^2 + g\eta = 0$ devient

$$\partial_t \varphi + g\eta = 0$$ à la surface.

→ La condition $\partial_t \eta + u\,\partial_x \eta = v$ devient $\partial_t \eta = v$ en $y = \eta(x,t)$

→ On développe : $v(x,\eta,t) = v(x,0,t) + \underbrace{\partial_y v \big|_{y=0}}_{\sim \epsilon^2}$

Donc $\partial_t \eta \simeq \partial_y \varphi \big|_{y=0}$

De même, $\partial_t \varphi \big|_{y=0} \simeq -g\eta$

Relation de dispersion :

→ On considère une onde monochromatique $\eta = A\cos(kx - \omega t)$ avec $A \sim \epsilon$

→ Dans le fluide, on a $\partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi = 0$

→ On regarde une solution à variable séparée :

$$\varphi(x,y,t) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(t)$$

↳ La condition à la surface $\partial_y \varphi = \partial_t \eta \,\big|_{y=0}$ devient :

$$\varphi_1(x)\,\varphi_2'(0)\,\varphi_3(t) = A\omega \sin(kx - \omega t)$$

Dès lors, $\varphi_1(x)\varphi_3(t) = \dfrac{A\omega}{\varphi_2'(0)} \sin(kx - \omega t)$ et donc

$$\varphi(x,y,t) = f(y)\sin(kx - \omega t)$$ $\|\ (\partial_x^2 + \partial_y^2)\varphi = 0$

$\rightarrow \quad -k^2 f(y)\sin(kx-\omega t) + f''(y)\sin(kx - \omega t) = 0$

$\Rightarrow \quad f'' - k^2 f = 0 \Rightarrow f = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}$

Or, en eau profonde, il faut que $\lim_{-y \to \infty} f = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

On obtient $\varphi(x,y,t) = C_1 e^{ky} \sin(kx - \omega t)$

→ Conditions aux bords :

En $y=0$, $\begin{cases} \partial_y \varphi = \partial_t \eta \Rightarrow k.C_1 = A\omega \\ \partial_t \varphi = g\eta \Rightarrow -\omega C_1 + Ag = 0 \Leftrightarrow \omega C_1 = Ag \end{cases}$

On déduit que : $\frac{k}{\omega} = \frac{A\omega}{C_1} \cdot \frac{C_1}{Ag} = \frac{\omega}{g} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = k.g}$ et $C_1 = \frac{Ag}{\omega}$

relation de dispersion ⇒ onde dispersive.

⊙ Trajectoire des particules de fluide :

→ On rappelle les composantes de la vitesse :

$u = \partial_x \varphi = k\, C_1 e^{ky} \cos(kx - \omega t)$
$= \frac{kAg}{\omega} e^{ky} \cos(kx - \omega t) = A\omega \cos(kx - \omega t) e^{ky}$

$v = \partial_y \varphi = k\, C_1 \sin(kx - \omega t) e^{ky}$
$= A\omega \sin(kx - \omega t) e^{ky}$

→ La trajectoire d'une PDF au cours du temps est déterminée par :

$\dot{x} = A\omega e^{ky} \cos(kx - \omega t)$
$\dot{y} = A\omega e^{ky} \sin(kx - \omega t)$

↳ On décompose : $x = \bar{x} + \epsilon x' + \dots$ Puisque $A \sim \epsilon$, on garde
$y = \bar{y} + \epsilon y' + \dots$ seulement $A\cos(\bar{x})$

$\Rightarrow \dot{x}' = A\omega e^{k\bar{y}} \cos(k\bar{x} - \omega t) \equiv R\cos(\varphi - \omega t)$
$\dot{y}' = A\omega e^{k\bar{y}} \sin(k\bar{x} - \omega t) \equiv R\sin(\varphi - \omega t)$

↳ Equation d'un cercle de rayon $R = Ae^{k\bar{y}}$

⊙ Réponse pour $t \to \infty$ pour une perturbation initiale localisée :

→ A grande distance de l'émission d'onde, on a :

$\eta(x,t) = A(x,t) e^{i\theta(x,t)} \simeq \bar{A}(x,t) \exp\left(i\left(\underbrace{\partial_x \theta}_{k} . x - \underbrace{(-\partial_t \theta)}_{\omega} . t\right)\right)$

Or, $\partial_t k + \partial_x \omega = 0 \Leftrightarrow \partial_t k + \frac{d\omega}{dk} \cdot \frac{\partial k}{\partial x} = 0$

$\Leftrightarrow \partial_t k + c_g \partial_x k = 0$ Si on se déplace à la vitesse de groupe, le # d'onde k reste constant.